GRAFICACIÓN DE CAMPOS VECTORIALES.

Problemas resueltos de nivel introductorio.

El método que va a utilizarse para la graficación de campos vectoriales es el *método de las líneas de flujo*. Como se mencionó en la teoría, la representación con líneas de flujo se basa en dos principios fundamentales. En primer lugar, la dirección del campo en un punto específico es tangente a la línea de flujo que pasa por dicho punto, siendo el sentido el mismo que el indicado en la línea de flujo. En segundo lugar, la magnitud del campo en un punto específico es proporcional a la densidad de líneas de flujo del campo en la vecindad del punto en cuestión.

A continuación se grafican cuatro ejemplos de campos básicos, los cuales se utilizarán como referencia para la graficación de otros campos vectoriales más complejos.

Ejemplo 1: Campo uniforme discontinuo.

Se elige como primer ejemplo un campo uniforme con una discontinuidad porque permite visualizar mejor la relación entre la densidad de líneas de flujo y la magnitud del campo vectorial que el caso de un campo uniforme en todo el espacio.

Para graficar un campo vectorial uniforme en una región basta con dibujar líneas paralelas y equidistantes que tengan la dirección y sentido del campo en cualquier punto. Sea el campo dado por:

$$\overline{F}(\overline{r}) = \begin{cases} -2\,\overline{1x}, \text{si } x < 0, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty \\ 4\,\overline{1x}, \text{si } x > 0, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty \end{cases}$$

De acuerdo con la expresión del campo, puede concluirse que éste depende solamente de la coordenada x, que tiene la dirección $\overline{1}x$ y que es discontinuo en x=0. Las dos primeras propiedades deben tomarse en cuenta para elegir el sistema de coordenadas para realizar el dibujo, que es el primer paso en la graficación. Se recomienda elegir siempre como abcisa el eje de la variable de la que depende el campo, en este caso la variable x. Para la elección del eje de ordenadas, se toma en cuenta la dirección del campo. Como en este ejemplo el campo apunta en una dirección paralela al eje x, el cual ya fue elegido, puede elegirse como eje de ordenadas el eje y o el eje z indistintamente. Tómese entonces por ejemplo el eje y, de manera que el campo se representará en el plano XY (o en cualquier plano con z constante). El dibujo debe incluir a x=0, ya que allí es donde se presenta la discontinuidad del campo.

En la región x<0 el campo es uniforme y tiene sentido negativo. Para graficarlo basta con trazar líneas paralelas equidistantes entre sí y señalar el sentido con flechas sobre cada línea, como se muestra en la figura 1.

Figura 1. Ejes coordenados y gráfica del campo $\overline{F}(\overline{r})$ para x<0.

Nótese que la separación entre líneas fue elegida arbitrariamente, que las líneas del campo se dibujaron de un color distinto, y que las flechas están en la punta de las líneas. Con respecto a esto último, ayuda a dar la impresión de que el campo llegara hasta cierto valor de *x* negativo, lo cual es incorrecto porque el campo se extiende hasta el infinito negativo. Dado que es imposible dibujar el campo hasta el infinito, para dar la impresión de que el campo continúa se dibujarán las flechas en medio de las líneas de flujo, en vez de en las puntas, como se muestra en la figura 2.

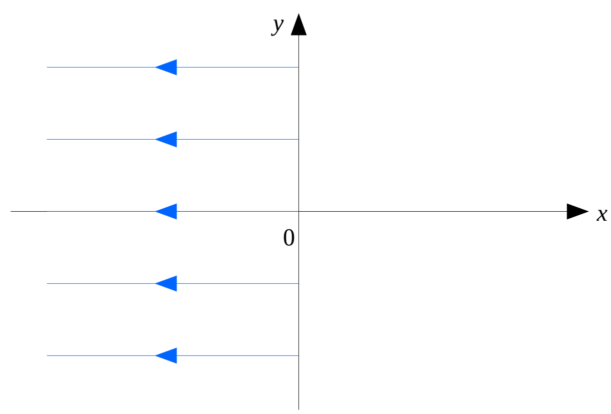

Figura 2. Gráfica corregida del campo $\overline{F}(\overline{r})$ para $x<0$.

Con relación al campo para $x>0$, se observa que su magnitud es el doble que la de la región $x<0$, por lo que debe duplicarse la densidad de líneas de flujo, lo que equivale a reducir la separación entre líneas a la mitad. Además, debe considerarse que dicho campo tiene sentido positivo y que debe darse la impresión de que las líneas continúan hasta el infinito. Considerando todo esto, la gráfica del campo total es como se muestra en la figura 3 de la siguiente página.

En resumen, primero se eligen los ejes coordenados, luego se grafica el campo en una región eligiendo arbitrariamente la separación entre líneas, y luego se grafica el campo en la otra región ajustando la separación entre líneas de acuerdo con la proporción en que la magnitud del campo aumenta o disminuye. Adicionalmente, se colocan flechas para indicar el sentido del campo. Sólo se colocarán en las puntas si el campo llega hasta un límite finito.

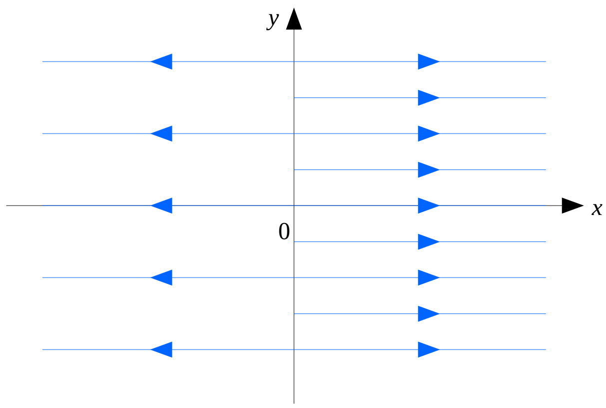

Figura 3: Gráfica completa $\overline{F}(\overline{r})$ del campo

Ejemplo 2: Otro campo uniforme discontinuo.

Ahora se graficará un campo que difiere del anterior en que el campo varía respecto a una coordenada y tiene una dirección distinta, además de tener dos discontinuidades. Sea el campo:

$$\overline{G}(\overline{r}) = \begin{cases} 2\,\overline{1}z, \text{ si } y < 0, |x| < \infty, |z| < \infty \\ -4\,\overline{1}z, \text{ si } 0 < y < 2, |x| < \infty, |z| < \infty \\ \overline{0}, \text{ si } y > 2, |x| < \infty, |z| < \infty \end{cases}$$

Para el campo dado, debe elegirse como eje de abcisas al de la variable, y como eje de ordenadas al eje paralelo a la dirección del campo, por lo que el campo se representa en un plano *YZ*. El dibujo debe ser tal que la separación de las líneas de flujo para 0<*y*<2 debe ser la mitad de la separación usada para *y*<0, mientras que para *y*>2 no hay líneas de flujo del campo. La discontinuidad de *y*=2 se muestra con una línea gris. En la figura 4 se muestra la gráfica del campo total.

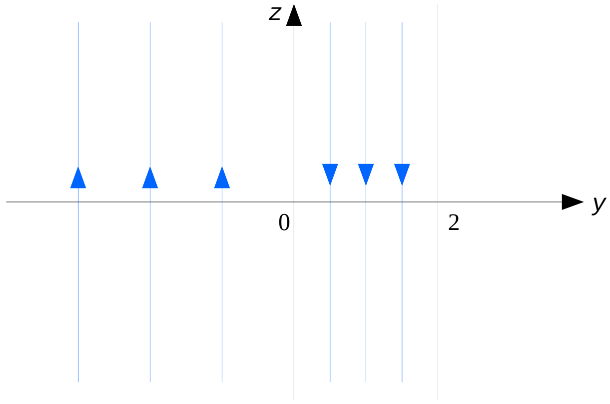

Figura 4: Gráfica de campo con dos discontinuidades.

Nótese que se representó la extensión hasta el infinito en dirección *z* colocando las flechas en medio de las líneas de flujo. Sin embargo, no hay forma de representar la extensión hasta el infinito en dirección de *y* negativo, excepto por la ausencia de alguna línea que señale discontinuidad, es decir, que el campo cambia o se extingue abruptamente, como sucede en $y=2^+$. Nótese también que en la expresión analítica del campo se utilizó la función valor absoluto para representar de manera compacta la extensión hasta el infinito en sentido positivo y negativo.

Ejemplo 3: Campo radial en coordenadas cilíndricas.

Sea el campo:

$$\bar{A}(\bar{r}) = \begin{cases} \bar{1}_{\rho}\, 2\rho, \text{ si } \rho < 1, 0 \le \phi < 2\pi, |z| < \infty \\ \bar{1}_{\rho}\, 4\rho^{-1}, \text{ si } 1 < \rho < 2, 0 \le \phi < 2\pi, |z| < \infty \\ \bar{0}, \text{ si } \rho > 2, 0 \le \phi < 2\pi, |z| < \infty \end{cases}$$

Dado que este campo varía con la coordenada radial, se elige como sistema de coordenadas el plano *XY*, lo que permite además mostrar que el campo es invariante respecto a la coordenada angular. Como el campo es discontiuo en ρ=1 y en ρ=2, se indican estas discontinuidades mediante circunferencias en color gris (también podrían usarse líneas interrumpidas), como se muestra en la figura 5.

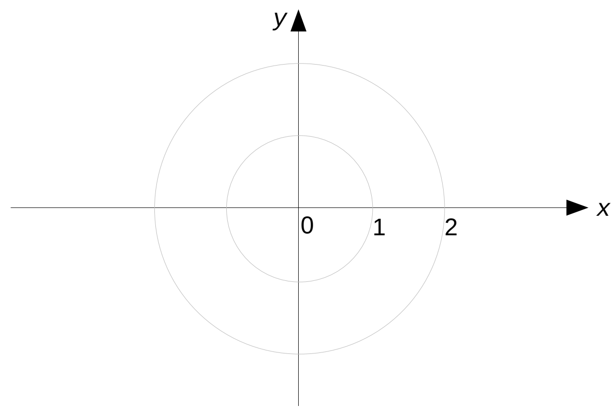

Figura 5: Sistema de coordenadas para graficar el campo $\overline{A}(\overline{r})$.

En la región ρ<1 el campo aumenta linealmente su magnitud, siendo nulo en ρ=0, mientras que para 1<ρ<2 la magnitud del campo decrece como 1/ρ. Además, en $\rho=1^-$ el campo tiene la mitad del valor que tiene en $\rho=1^+$. Además, el campo tiene simetría angular. Debe tomarse en cuenta todo esto para graficar el campo.

Comenzando por la gráfica para la región 1<ρ<2, la forma de representar el decrecimiento del tipo 1/ρ es haciendo que el número de líneas que sale de ρ=1 sea igual al número de líneas que llega a ρ=2. Esto es así porque de esa manera el flujo total del campo a través de cualquier cilindro concéntrico con radio entre 1 y 2 es constante, lo cual indica que el campo debe decrecer como 1/ρ para compensar el crecimiento lineal del área del cilindro con el radio. En conclusión, cualquier campo radial que decrezca proporcionalmente a 1/ρ se representa con un número de líneas de flujo constante, equiespaciados angularmente, como se muestra en la figura 6.

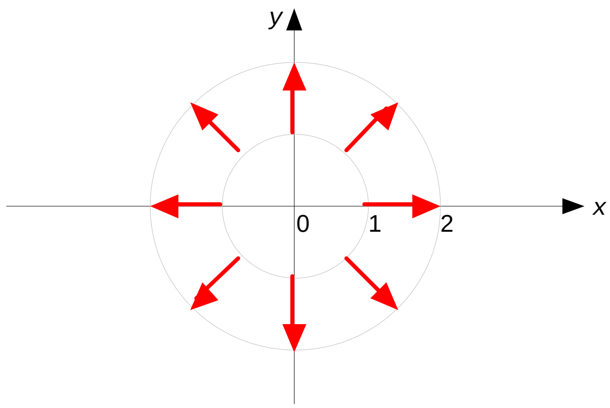

Figura 6: Gráfica del campo $\bar{A}(\bar{r})$ para 1<ρ<2.

Para representar el campo en la región ρ<1, tomando en cuenta que en ρ=0 es nulo y que el valor en $\rho=1^-$ es la mitad del valor que tiene en $\rho=1^+$, se dibuja en $\rho=1^-$ la mitad de las líneas que hay en $\rho=1^+$, y en vez de prolongar estas líneas hasta el centro, se prolongan sólo hasta aproximadamente ρ=1/2, para representar tanto la disminución del valor del campo al reducir el radio como la desaparición del campo en ρ=0, como se muestra en la figura 7.

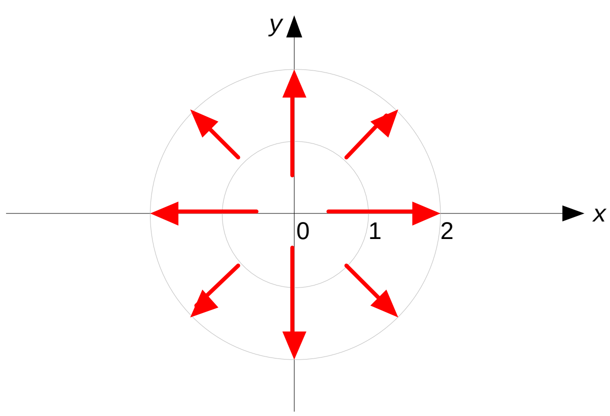

Figura 7: Gráfica del campo $\bar{A}(\bar{r})$ para 0<ρ<2.

El dibujo de la figura 7 pudiera mejorarse duplicando el número de líneas de flujo en las dos regiones, lo que permitiría representar mejor el decrecimiento del campo a medida que el radio se reduce, pero por los momentos esta gráfica se considerará bastante aceptable. Finalmente, para representar el campo nulo existente para ρ>2 no hay que dibujar nada, por lo que la figura 7 es también la gráfica del campo $\overline{A}(\overline{r})$ para todo el espacio.

Es importante mencionar que para campos radiales en coordenadas esféricas, una dependencia radial del tipo r^{-2} es la que corresponde a un número constante de líneas de flujo, ya que el área de la esfera aumenta como r^2 y el campo debe decrecer como r^{-2} para que el flujo sea constante.

Ejemplo 4: Campo que rota alrededor de un eje.

Sea el campo:

$$\overline{B}(\overline{r}) = \begin{cases} \overline{1\phi}\, 2\rho, \text{si } \rho < 1, 0 \le \phi < 2\pi, \lvert z \rvert < \infty \\ -\overline{1\phi}\, 2\rho^{-1}, \text{si } 1 < \rho < 2, 0 \le \phi < 2\pi, \lvert z \rvert < \infty \\ \overline{0}\,, \text{si } \rho > 2, 0 \le \phi < 2\pi, \lvert z \rvert < \infty \end{cases}$$

Para la elección del sistema de coordenadas se repiten las consideraciones del ejemplo 3, con la diferencia de que en este caso el campo tiene dirección $\overline{1\phi}$, lo cual puede representarse mejor en el plano *XY*. Como el campo tiene dirección angular, las líneas del campo toman la forma de circunferencias concéntricas. Para representar los cambios en la intensidad del campo sólo puede utilizarse la variación en la separación de las líneas. Nótese que la magnitud del campo es continua en ρ=1, pero hay un cambio de sentido, lo cual indica que las dos circunferencias más cercanas a este sitio deben aproximadamente ser equidistantes a la circunferencia que representa a ρ=1 . En la figura 8 de la siguiente página se muestra el dibujo del campo en cuestión.

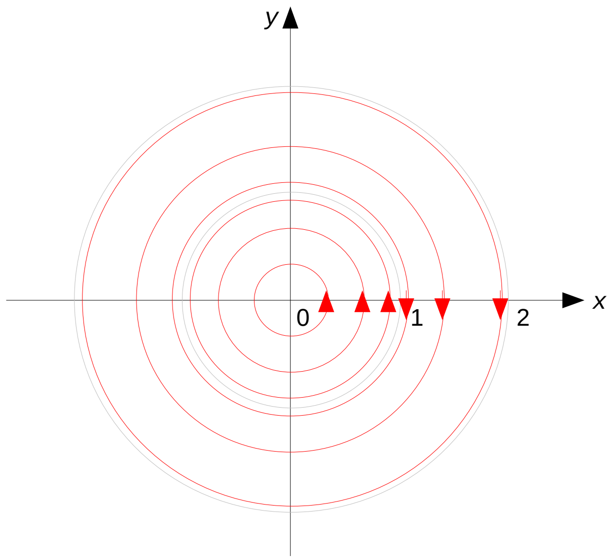

Figura 8: Gráfica del campo $\overline{B}(\overline{r})$.

Nótese que el aumento lineal de la magnitud del campo en la región 0<ρ<1 se ha representado con una disminución gradual de la separación de las líneas de flujo, mientras que el decrecimiento de la región 1<ρ<2 se ha representado aumentando de forma más o menos brusca la separación entre líneas. Se dibujó una línea interior al borde ρ=2 para representar que hay un cambio abrupto del campo en esa zona, ya que en ρ=2^+ no hay campo.

Resumen.

Para graficar un campo vectorial utilizando la técnica de las líneas de flujo en primer lugar se elige un sistema de coordenadas que permita visualizar tanto la variación del campo como la dirección del mismo. En dicho sistema de coordenadas se representan los sitios donde hay discontinuidades. Luego se representan las líneas de flujo del campo, tomando como referencia al campo uniforme en coordenadas rectangulares, al campo que varía como

$1/\rho$ en coordenadas cilíndricas y al campo que varía como $1/r^2$ en coordenadas esféricas. Es importante ir variando la separación entre las líneas de flujo para representar la variación del campo, así como indicar el sentido del campo mediante flechas, ya que la dirección del campo es tangente a las líneas de flujo que se dibujen.